Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
11.12.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 10

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 18.12.2008

Aufgabe 47 (6 Punkte)

Berechne alle stationären Punkte folgender Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ aus M und entscheide, ob es sich jeweils um ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt handelt:

(a) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $M = (0, \pi) \times (0, \pi)$.

(b) $f(x, y, z) = 4yz - y^2 - \cos x + 6z - 5z^2$, $M = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 48 (Methode der kleinsten Quadrate und Regressionsgerade) (6 Punkte)

Zwischen zwei reellen Größen x und y wird ein linearer Zusammenhang der Form $y = ax + b$ vermutet. Um a und b zu schätzen, ermittelt man an m paarweise verschiedenen Stellen $x_1, \ldots, x_m$ entsprechende Werte für y, also Meßwerte $y_1, \ldots, y_m$. Bei der *Methode der kleinsten Quadrate* schätzt man dann a und b so, dass die „Summe der Fehlerquadrate"

$$f(a, b) := \sum_{\nu=1}^{m} (ax_\nu + b - y_\nu)^2$$

minimal wird. Berechne diese Schätzungen von a und b für $m = 5$ und die Punkte $\binom{x_1}{y_1} = \binom{0}{1/2}$, $\binom{x_2}{y_2} = \binom{1}{2}$, $\binom{x_3}{y_3} = \binom{2}{2}$, $\binom{x_4}{y_4} = \binom{3}{3}$, $\binom{x_5}{y_5} = \binom{4}{5/2}$. Skizziere diese fünf Punkte und die Regressionsgerade in der x-y-Ebene.

Aufgabe 49 (Konvexität und globale Extrema) (8 Punkte)

(a) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und für alle $x, y \in M$ gelte $\overline{xy} := \{x + t(y - x) \,|\, t \in [0, 1]\} \subset M$. Weiter seien $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(M)$, und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ sei positiv definit für alle $x \in M$ und $a \in M$ mit $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Dann ist a das globale Minimum von f auf M, genauer gilt: $f(x) > f(a)$ und $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in M \setminus \{a\}$.

(b) Zeige: $f(x, y) := y^4 + e^{2x} + y^2 e^x - 6y - 3x + 3 > 0 = f(0, 1)$ für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{1}\}$.

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/`